再谈四面体的六棱求体积公式

王永山

(扬州大学数学科学学院,江苏 225002)

中图分类号: O123-42 文献标识码: A 文章编号: 0488-7395(2004)19-0037-01

本刊2003年10月第19期刊登了俞志老师的四面体六棱求体积公式,其证明方法值得我们学习,笔者在阅读后再对题目思考,得出一个新的公式,能达到同样的效果,现表述之,与大家共享.

题目 已知四面体 $ABCD$ 各棱的长,求其体积.

解 以四面体 $ABCD$,点 A 为坐标原点建立坐标系(如图1),因我们知道各棱长,不妨设 $|AB|=a$, $|CD|=a'$, $|AC|=b$, $|BD|=b'$, $|AD|=c$, $|BC|=c'$. $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{c}$.

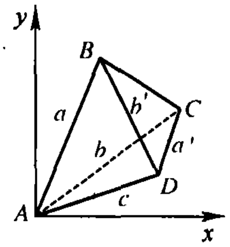

图1

我们知道 $V_{ABCD}=\frac{1}{6}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$,

所以 $V^2=(\frac{1}{6}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c})(\frac{1}{6}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c})$.

因为 $|Z|'=|Z|$,所以

$$V^2=\frac{1}{36}\begin{pmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{c}\end{pmatrix}(\boldsymbol{a}\quad\boldsymbol{b}\quad\boldsymbol{c})$$

$$=\frac{1}{36}\begin{pmatrix}\boldsymbol{aa}&\boldsymbol{ab}&\boldsymbol{ac}\\ \boldsymbol{ba}&\boldsymbol{bb}&\boldsymbol{bc}\\ \boldsymbol{ca}&\boldsymbol{cb}&\boldsymbol{cc}\end{pmatrix}\qquad(1)$$

设 $\angle BAC=\alpha$, $\angle CAD=\beta$, $\angle BAD=\gamma$,

$|AB|^2+|AC|^2-2|AB||AC|\cos\alpha=|BC|^2$,

由余弦定理知

$$\cos\alpha=\frac{|AB|^2+|AC|^2-|BC|^2}{2|AB||AC|}=\frac{a^2+b^2-c'^2}{2ab}.$$

同理可求 $\cos\beta=\frac{b^2+c^2-a'^2}{2bc}$,

$$\cos\gamma=\frac{a^2+c^2-b'^2}{2ac}$$

$$\boldsymbol{ab}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\alpha=ab\cos\alpha=\frac{a^2+b^2-c'^2}{2}.$$

又因为 $\boldsymbol{bc}=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\cos\beta=bc\cos\beta=\frac{b^2+c^2-a'^2}{2}$,

$$\boldsymbol{ac}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|\cos\gamma=ac\cos\gamma=\frac{a^2+c^2-b'^2}{2},$$

所以

$$V^2=\begin{pmatrix}a^2&\frac{a^2+b^2-c'^2}{2}&\frac{a^2+c^2-b'^2}{2}\\ \frac{a^2+b^2-c'^2}{2}&b^2&\frac{b^2+c^2-a'^2}{2}\\ \frac{a^2+c^2-b'^2}{2}&\frac{b^2+c^2-a'^2}{2}&c^2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{36}\{(abc)^2-[a^2(b^2+c^2-a'^2)+b^2(a^2+c^2-b'^2)+c^2(a^2+b^2-c'^2)]/4+[(a^2+b^2-c'^2)(a^2+c^2-b'^2)(b^2+c^2-a'^2)]/4\}.$$

设 $M=b^2+c^2-a'^2$, $N=a^2+c^2-b'^2$, $P=a^2+b^2-c'^2$,所以

$$V=\frac{1}{6}\sqrt{(abc)^2-\frac{a^2M^2+b^2N^2+c^2P^2}{4}+\frac{MNP}{4}}.$$

此公式结构比较简单,便于记忆,愿能给同学们带来些帮助.

验证:已知 $AB=\sqrt{13}$, $AD=\sqrt{11}$, $AC=\sqrt{7}$, $BD=\sqrt{5}$, $BC=\sqrt{2}$, $CD=\sqrt{3}$,求其体积.

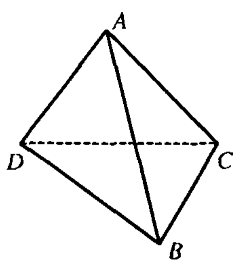

图2

$a=\sqrt{13}$, $a'=\sqrt{3}$,

解 不妨设 $b=\sqrt{7}$, $b'=\sqrt{5}$ 通过计算得出: $V=\frac{1}{12}\sqrt{118}$

$c=\sqrt{11}$, $c'=\sqrt{2}$

该结果与俞志老师的完全吻合.

收稿日期:2004-03-15