

SGU126 解题手记

题目大意：有两个盒子，第一个盒子中有 A 个球，第二个中有 B 个球 ($0 < A+B < 2^{31}$)。我们可以把球从一个盒子移动到另一个中。从一个盒子中移动到另一个盒子中的球的数目必须与移动到的盒子中原有球的数目相等。你需要判断，能否把所有的球移动到同一个盒子中。

Input:

A B

Output:

如果能把所有的球移动到同一个盒子中，那么输出最少需要的移动次数 N ，否则输出 -1 。

对于第一个盒子中有 A 个球，第二个盒子中有 B 个球这种情形，以下表示为 (A,B) 。

设 $f(A,B)$ 表示第一个盒子中有 A 个球，第二个盒子中有 B 个球时，最少需要移动的次数，特别的，若不能移动到同一个盒子中，则 $f(A,B)=-1$ 。

定义**单次操作**：记作 $\langle k \rangle$ ，当 $k > 0$ 时，表示从第一个盒子中移动 k 个球到第二个盒子中；当 $k < 0$ 时，表示从第二个盒子中移动 $-k$ 个球到第一个盒子中。即 (A,B) 通过单次操作 $\langle k \rangle$ ，转变为 $(A-k, B+k)$ 。

一个符合题目移动规则的移动称为**合法的单次操作**。

定义 **N 次操作**：记作 $\langle k_1, k_2, \dots, k_N \rangle$ ，表示连续的 N 个单次操作，第 i 个单次操作作为 $\langle k_i \rangle$ 。

如果 N 次操作中每一个都是合法的单次操作，则这个 N 次操作称为**合法的 N 次操作**。

定理 1：若 (A,B) 可以通过合法的 N 次操作转变为 $(A+B, 0)$ 或 $(0, A+B)$ ，且 $m \in \mathbb{N}^*$ ，则 (mA, mB) 可以通过合法的 N 次操作转变为 $(mA+mB, 0)$ 或 $(0, mA+mB)$ 。

证明：①当 $N=1$ 时，设 (A,B) 通过 $\langle k_1 \rangle$ 转变为 $(A+B, 0)$ 或 $(0, A+B)$ ，则 (mA, mB) 可以通过 $\langle mk_1 \rangle$ 转变为 $(mA+mB, 0)$ ，命题成立。

② 假设 $N=p$ ($p \geq 1$) 时命题成立，设 (A,B) 通过 $\langle k_1, k_2, \dots, k_p \rangle$ 转变为 $(A+B, 0)$ 或 $(0, A+B)$ ，则 (mA, mB) 可以通过 p 次操作 $\langle mk_1, mk_2, \dots, mk_p \rangle$ 转变为 $(mA+mB, 0)$ 或 $(0, mA+mB)$ 。

设 $(A+k_0, B-k_0)$ 通过合法的单次操作 $\langle k_0 \rangle$ 转变为 (A,B) ，则 $(A+k_0, B-k_0)$ 通过合法的 $p+1$ 次操作 $\langle k_0, k_1, k_2, \dots, k_p \rangle$ 转变为 $(A+B, 0)$ 或 $(0, A+B)$ 。

$\langle mk_0 \rangle$ 对于 $(mA+mk_0, mB-mk_0)$ 是合法的单次操作，则 $(mA+mk_0, mB-mk_0)$ 可以通过合法的 $p+1$ 次操作 $\langle mk_0, mk_1, mk_2, \dots, mk_p \rangle$ 转变为 $(mA+mB, 0)$ 或 $(0, mA+mB)$ 。

即，当 $N=p+1$ 时，命题成立。

③ 综上，命题成立。

定理 2：若 $\gcd(A,B)=1$ ，且 $A+B=2^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)，则 $f(A,B)=n$ 。

证明：①当 $n=1$ 时，命题成立。

② 假设当 $n=p$ ($p \geq 1$) 时命题成立, 则 $\gcd(A,B)=1$, 且 $A+B=2^p$ 时,
 $f(A,B)=p$ 。

设 $A_1+B_1=2^{p+1}$, 且 $A_1=q$ ($q \neq 2k, k \in \mathbb{N}$), $B_1=2^{p+1}-q$, 且 $A_1 < B_1$, 则 (A_1, B_1) 可以通过合法的单次操作 $\langle q \rangle$ 转变为 $(2q, 2^{p+1}-2q)$ 。

$$\therefore \gcd(q, 2^p - q) = 1$$

$$\therefore f(q, 2^p - q) = p$$

$$\therefore f(2q, 2^{p+1} - 2q) = f(q, 2^p - q) = p$$

$$\therefore f(A_1, B_1) = p + 1$$

同理可得, 当 $A_1 > B_1$ 时, $f(A_1, B_1) = p + 1$

即, 当 $n=p+1$ 时, 命题成立。

③ 综上, 当 $n \in \mathbb{N}^*$ 时, 命题成立。

定理 3: 若 $f(A,B) \neq -1$, 则 $(A+B)/\gcd(A,B) = 2^n$ 。

证明: [暂缺]MaShuo 曾有一个说明, 我认为可以说清楚定理 3 的问题, 但因不够严谨, 不能作为证明。

由以上三个定理可以得出, 如果 A, B 中有一个是 0, 那么答案就是 0, 如果 $(A+B)/\gcd(A,B) = 2^n$, 则 n 即是题目要求的答案, 若 $(A+B)/\gcd(A,B) \neq 2^n$, 则输出 -1。

Submit 1: WA on 9。gcd 写错了。

Submit 2: RTE on 1。gcd 又写错了。

Submit 3: WA on 14。这可郁闷了。

Submit 4: AC。无奈了……随便改了点什么 (改了求 \log_2 的方法和特殊判断输出 0 的条件) 又交了一遍。Submit 3 是怎么回事?